

## IT@CookBook, 기초 신호 및 시스템(2판)

### [연습문제 답안 이용 안내]

- 본 연습문제 답안의 저작권은 한빛아카데미(주)에 있습니다.
- 이 자료를 무단으로 전재하거나 배포할 경우 저작권법 136조에 의거하여 최고 5년 이하의 징역 또는 5천만원 이하의 벌금에 처할 수 있고 이를 병과(併科)할 수도 있습니다.

## 제4장 연속 시스템의 시간 영역 해석

### [Quick Review]

※ 다음 문제에서 옳은 것을 골라라.

(1) 연속 시스템의 임펄스 응답은 물리적으로 구할 수 없다. (○, ×)

Ans) ○

(2) 컨벌루션 표현의 유도에 쓰이지 않는 시스템 성질은 (선형성, 시불변성, 인과성)이다.

Ans) 인과성

(3) LTI 시스템의 입력에 대한 출력은 임펄스 응답만 알면 항상 구할 수 있다. (○, ×)

Ans) ○

(4) 시스템에 대한 컨벌루션 표현은 비선형 또는 시변 시스템에도 적용된다. (○, ×)

Ans) ×

(5) 미끄럼 방식 컨벌루션 계산에서 두 신호 중 어느 것을 뒤집어도 상관없다. (○, ×)

Ans) ○

(6) 컨벌루션 적분이 만족하지 않는 성질은 (교환, 결합, 배분, 곱) 성질이다.

Ans) 곱

(7) 종속 연결한 시스템의 연결 순서를 바꾸면 (같은, 다른) 시스템이다.

Ans) 같은

(8) 종속 연결의 등가 시스템의 임펄스 응답은 각 임펄스 응답의 (합, 곱, 컨벌루션)이다.

Ans) 컨벌루션

컨벌루션의 결합 법칙에 의해 종속 연결된 시스템의 임펄스 응답은 각 시스템 임펄스 응답의 컨벌루션이 된다.

(9) 두 신호를 컨벌루션한 신호의 길이는 각 신호의 길이의 (합, 차, 곱)이다.

Ans) 합

(10) 컨벌루션 계산을 하지 않고서도 결과 신호의 존재 구간을 알 수 있다. (○, ×)

Ans) ○

(11) 입력이 0이면 시스템은 응답을 발생하지 않는다. (○, ×)

Ans) ×

(12) 미분 방정식으로 표현된 시스템에 넣어주는 입력이 같으면 출력도 항상 같다. (○, ×)

**Ans)** ×

(13) 미분 방정식의 계수가 시간 함수이면 시변 시스템이다. (○, ×)

**Ans)** ○

(14) 3차 미분 방정식의 직접형 구현도는 (2, 3, 4, 6)개의 적분기가 필요하다.

**Ans)** 3

(15) 연속 시스템 구현도에서 제1 직접형이 주어지면 제2 직접형을 그릴 수 있다. (○, ×)

**Ans)** ○

(16) 시스템의 고유한 특성을 반영하지 못하는 것은 (시스템 모드, 동차해, 특이해)이다.

**Ans)** 특이해

(17) 임펄스 응답은 시스템 모드들로 이루어진 동차해와 형태가 같다. (○, ×)

**Ans)** ○

(18) 임펄스 응답의 길이가 (유한, 무한)하면 현재 출력에 모든 과거 입력이 관련된다.

**Ans)** 무한

(19) 임계 안정인 시스템은 BIBO (안정, 불안정)한 시스템이다.

**Ans)** 불안정

(20) 시스템 특성은 (임펄스 응답, 시스템 모드, 특성근, 입력)과는 무관하다.

**Ans)** 입력

## [기초 문제]

4.1 LTI 시스템의 입출력 관계가 다음과 같이 주어질 때 시스템의 임펄스 응답을 구하라.

그리고 이를 이용하여 시스템의 인과성과 안정도를 판별하라.

(a)  $y(t) = x(t-3)$

Ans) 인과 시스템, 안정한 시스템

(b)  $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau-3)d\tau$

Ans) 인과 시스템, 불안정한 시스템

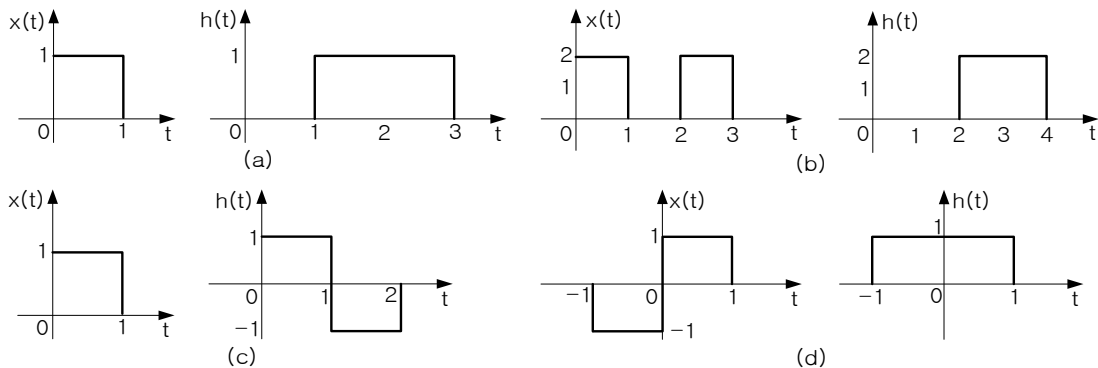
(c)  $y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} x(\tau) d\tau$

Ans) 인과 시스템, 안정한 시스템

(d)  $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\tau)} x(\tau-1) d\tau$

Ans) 비인과 시스템, 불안정한 시스템

4.2 다음 그림의  $x(t)$ 와  $h(t)$ 에 대해 컨벌루션 연산을 수행하고, 그 결과를 그려라.



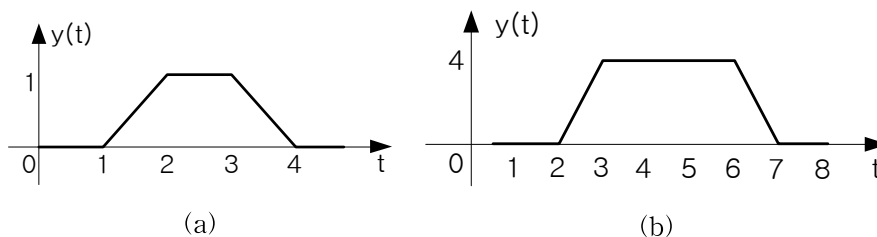
Ans)

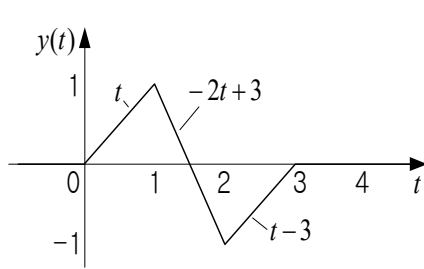
(a)  $y(t) = (t-1)[u(t-1)-u(t-2)] + [u(t-2)-u(t-3)] + (-t+4)[u(t-3)-u(t-4)]$   
 $= (t-1)u(t-1) - (t-2)u(t-2) - (t-3)u(t-3) + (t-4)u(t-4)$

(b)  $y(t) = (t-2)[u(t-2)-u(t-3)] + [u(t-3)-u(t-6)] + (-t+7)[u(t-6)-u(t-7)]$   
 $= (t-2)u(t-2) - (t-3)u(t-3) - (t-6)u(t-6) + (t-7)u(t-7)$

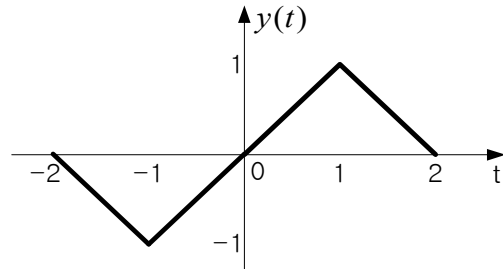
(c)  $y(t) = t[u(t)-u(t-1)] + (-2t+3)[u(t-1)-u(t-2)] + (t-3)[u(t-2)-u(t-3)]$   
 $= tu(t) - 3(t-1)u(t-1) + 3(t-2)u(t-2) - (t-3)u(t-3)$

(d)  $y(t) = -(t+2)[u(t+2)-u(t+1)] + t[u(t+1)-u(t-1)] - (t-2)[u(t-1)-u(t-2)]$   
 $= -(t+2)u(t+2) + 2(t+1)u(t+1) - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2)$





(c)



(d)

4.3 임펄스 응답이  $h(t) = e^{-t}u(t)$ 인 LTI 시스템에 입력  $x(t)$ 가 다음과 같을 때 출력  $y(t)$ 를 구하라.

(a)  $x(t) = \delta(t) + \delta(t-2)$

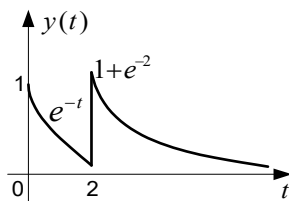
**Ans)**  $y(t) = e^{-t}u(t) + e^{-(t-2)}u(t-2)$

(b)  $x(t) = e^{-t}u(t)$

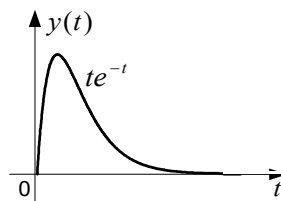
**Ans)**  $y(t) = te^{-t}u(t), \quad t > 0$

(c)  $x(t) = e^{-2t}u(t)$

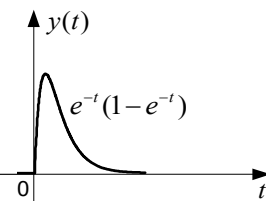
**Ans)**  $y(t) = e^{-t}(1 - e^{-t})u(t)$



(a)

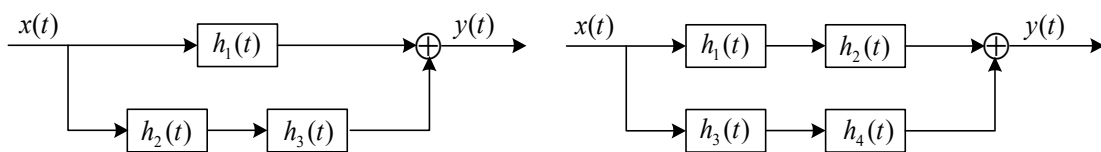


(b)



(c)

4.4 다음 그림의 연속 LTI 시스템에 대해 전체 시스템의 임펄스 응답을 구하라.



(a)

(b)

(a)  $h_1(t) = e^{-3t}u(t), \quad h_2(t) = e^{-2t}u(t), \quad h_3(t) = \delta(t-1)$

**Ans)**  $h(t) = h_1(t) + h_2(t) * h_3(t) = e^{-3t}u(t) + e^{-2(t-1)}u(t-1)$

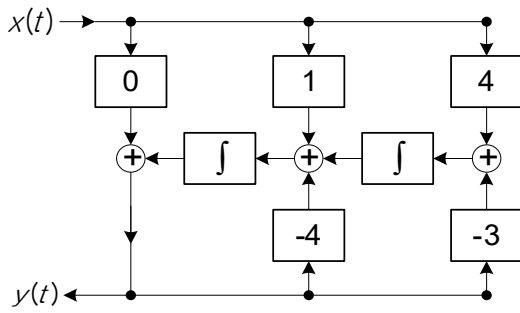
(b)  $h_1(t) = e^{-2t}u(t), \quad h_2(t) = 2e^{-t}u(t), \quad h_3(t) = e^{-3t}u(t), \quad h_4(t) = 4\delta(t)$

**Ans)**  $h(t) = h_1(t) * h_2(t) + h_3(t) * h_4(t) = 2(e^{-t} - e^{-2t})u(t) + 4e^{-3t}u(t)$

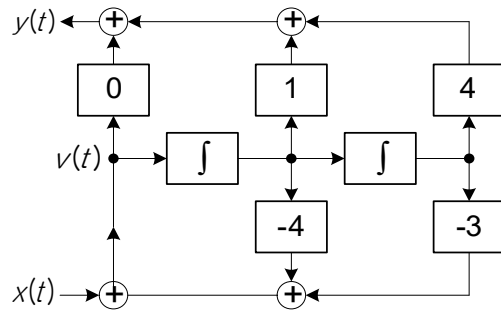
4.5 다음의 미분 방정식으로 표현되는 LTI 시스템에 대해 제1 직접형 및 제2 직접형 구현도를 그려라. 또한 특성 방정식을 구하고 안정도를 판별하라.

(a)  $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t)$

**Ans)** 특성 방정식 :  $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ , 안정한 시스템



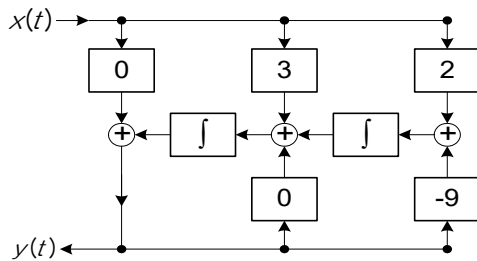
(a) 제1 직접형



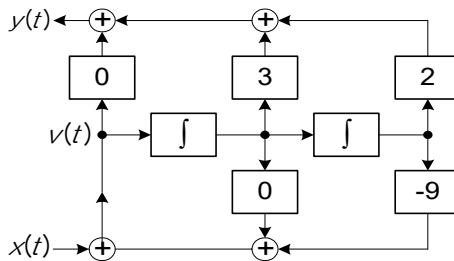
(b) 제2 직접형

(b)  $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 9y(t) = 3\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$

**Ans)** 특성방정식 :  $\lambda^2 + 9 = (\lambda + j3)(\lambda - j3) = 0$ , 시스템은 임계 안정(불안정)



(a) 제1 표준형



(b) 제2 표준형

**4.6** 다음의 미분 방정식으로 표현되는 LTI 시스템의 계단 응답을 구하라. 단,  $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 0$ 이다.

(a)  $\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$

**Ans)**  $y(t) = -e^{-t} + 1, \quad t \geq 0$

(b)  $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 3x(t)$

**Ans)**  $y(t) = -\frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t} + 1, \quad t \geq 0$

**4.7** 미분 방정식  $\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$ 로 표현되는 LTI 시스템에 대해 다음의 입력과 초기 조건에 대한 시스템 응답을 구하라.

(a)  $x(t) = u(t), \quad y(0) = 2$

**Ans)**  $y(t) = e^{-t} + 1, \quad t \geq 0$

(b)  $x(t) = e^{-t}u(t), \quad y(0) = 1$

**Ans)**  $y(t) = e^{-t} + te^{-t}, \quad t \geq 0$

(c)  $x(t) = e^{-2t}u(t), \quad y(0) = 1$

**Ans)**  $y(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}, \quad t \geq 0$

(d)  $x(t) = 2u(t) + e^{-t}u(t), \quad y(0) = 5$

**Ans)**  $y(t) = 3e^{-t} + te^{-t} + 2, \quad t \geq 0$

**4.8** 미분 방정식  $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 7\frac{dy(t)}{dt} + 12y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$ 로 표현되는 LTI 시스템에 대해 다음의 입력이 인가될 때 시스템 출력을 구하라. 단, 초기 조건은 공통으로  $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 1$ 이다.

(a)  $u(t)$

**Ans)**  $y(t) = \frac{1}{3}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-4t} + \frac{1}{6}, \quad t \geq 0$

(b)  $e^{-t}u(t)$

**Ans)**  $y(t) = \frac{1}{2}e^{-3t} - \frac{2}{3}e^{-4t} + \frac{1}{6}e^{-t}, \quad t \geq 0$

(c)  $e^{-3t}u(t)$

**Ans)**  $y(t) = 2e^{-3t} - 2e^{-4t} - te^{-3t}, \quad t \geq 0$

**4.9** 다음의 미분 방정식으로 나타낸 LTI 시스템의 안정도를 판별하라.

(a)  $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 7\frac{dy(t)}{dt} + 12y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$

**Ans)** 특성 방정식 :  $\lambda^2 + 7\lambda + 12 = (\lambda + 3)(\lambda + 4) = 0$ , 시스템은 안정

(b)  $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = x(t)$

**Ans)** 특성 방정식 :  $(\lambda^2 + 2\lambda + 5) = (\lambda + 1 + j2)(\lambda + 1 - j2) = 0$ , 시스템은 안정

(c)  $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$

**Ans)** 특성 방정식 :  $\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0$ , 시스템은 불안정

(d)  $\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 2\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$

**Ans)** 특성 방정식 :  $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1 + j1)(\lambda - 1 - j1) = 0$ , 시스템은 불안정

**4.10** 다음의 임펄스 응답을 갖는 LTI 시스템의 안정도를 판별하라.

(a)  $h(t) = te^{-2t}u(t)$

**Ans)** 안정한 시스템

(b)  $h(t) = \cos(2t)u(t)$

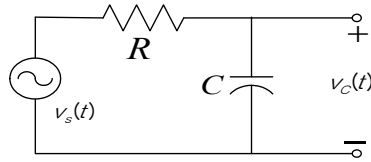
**Ans)** 불안정한 시스템

(c)  $h(t) = e^{-2t}\cos(2t)u(t)$

**Ans)** 안정한 시스템

## [응용 문제]

4.11 다음 그림과 같은 전기회로의 임펄스 응답을 구하라.



Ans) 
$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_C(t) = \frac{1}{RC}v_s(t)$$

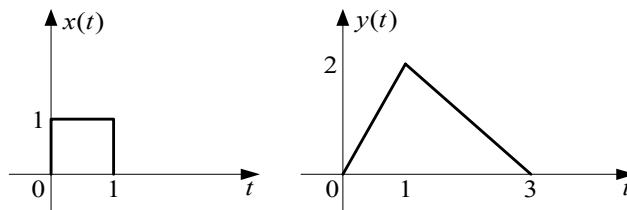
위 식의 양변에  $e^{\frac{1}{RC}t}$  을 곱하여  $u \frac{dv}{dt} + \frac{du}{dt}v = \frac{d(uv)}{dt} = z$  꼴로 정리한 뒤 시간  $0^-$ 에서  $t$ 까지 적분하면

$$e^{\frac{1}{RC}t} h(t) \Big|_{0^-}^t = e^{\frac{1}{RC}t} h(t) - h(0^-) = \int_{0^-}^t \frac{1}{RC} e^{\frac{1}{RC}\tau} \delta(\tau) d\tau$$

$$\therefore h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t}, \quad t \geq 0$$

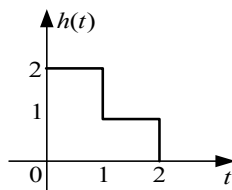
4.12 LTI 시스템의 입력  $x(t)$ 와 출력  $y(t)$ 가 그림과 같을 때 이 시스템의 임펄스 응답  $h(t)$ 를 구하라.

(Hint :  $\dot{x}(t)$ 가 임펄스만으로 이루어짐을 이용하라.)

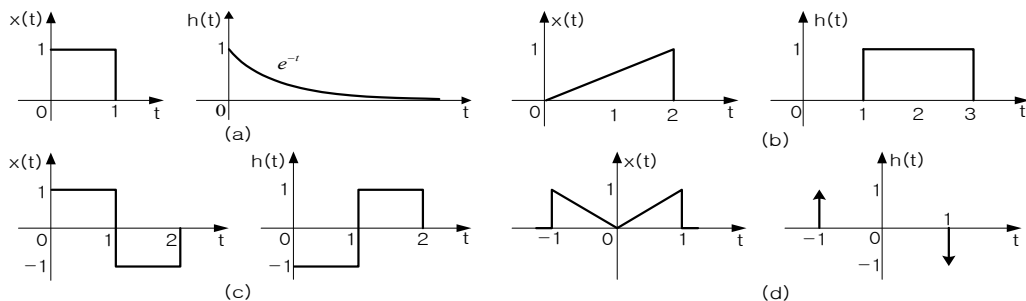


Ans) 
$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t) * h(t) - \dot{x}(t-1) * h(t) = \delta(t) * h(t) - \delta(t-1) * h(t) = h(t) - h(t-1)$$

$$\therefore h(t) = 2\{u(t) - u(t-1)\} + \{u(t-1) - u(t-2)\} = 2u(t) - u(t-1) - u(t-2)$$



4.13 다음 그림의  $x(t)$ 와  $h(t)$ 에 대해 컨볼루션 연산을 수행하고, 그 결과를 그려라.



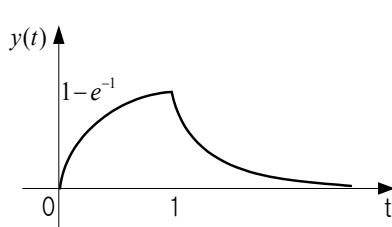
Ans)

$$(a) \ y(t) = (1 - e^{-t})[u(t) - u(t-1)] + (e-1)e^{-t}u(t-1)$$

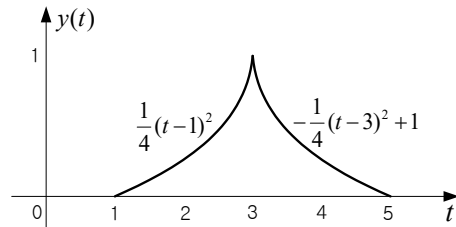
$$(b) \ y(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}(t-1)^2, & 1 \leq t \leq 3 \\ -\frac{1}{4}(t-3)^2 + 1, & 3 \leq t \leq 5 \\ 0, & \text{그 외} \end{cases}$$

$$(c) \ y(t) = \begin{cases} -t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 3t-4, & 1 \leq t \leq 2 \\ -3t+8, & 2 \leq t \leq 3 \\ t-4, & 3 \leq t \leq 4 \\ 0, & \text{그 외} \end{cases}$$

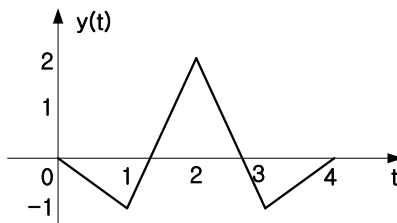
$$(d) \ y(t) = x(t+1) - x(t-1)$$



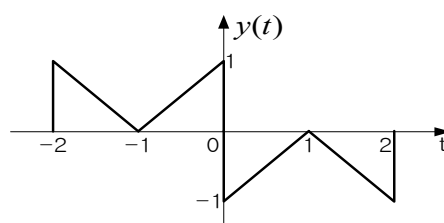
(a)



(b)

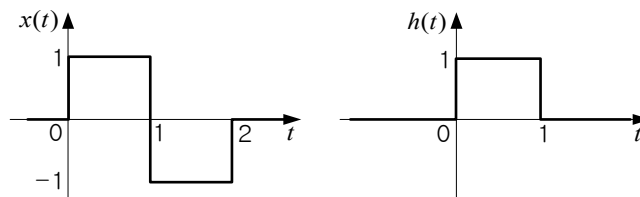


(c)



(d)

4.14 다음 그림의 신호 쌍에 대해 컨벌루션을 직접 계산하지 말고 컨벌루션 성질들을 이용하여 구하라.



Ans) 컨벌루션의 미분 성질과 임펄스와의 컨벌루션 성질을 적용하면

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} * h(t) = u(t) - 3u(t-1) + 3u(t-2) - u(t-3)$$

$$y(t) = r(t) - 3r(t-1) + 3r(t-2) - r(t-3) \\ = tu(t) - 3(t-1)u(t-1) + 3(t-2)u(t-2) - (t-3)u(t-3)$$

4.15 다음의 함수 쌍에 대해 컨벌루션  $y(t) = x(t) * h(t)$ 를 구하고, 그 결과를 그려라.

$$(a) \ x(t) = e^{-t}(u(t+2) - u(t-2)), \quad h(t) = \delta(t+1) - \delta(t-1)$$

Ans)  $-3 \leq t < -1$  :  $y(t) = e^{-(t+1)}$

$$-1 \leq t \leq 1 : y(t) = e^{-t}(e^{-1} - e^1)$$

$$1 < t \leq 3 : y(t) = -e^{-(t-1)}$$

$$(b) x(t) = e^{-t}(u(t+2) - u(t-2)), \quad h(t) = u(t)$$

$$Ans) -2 \leq t < 2 : y(t) = e^2(1 - e^{-(t+2)})$$

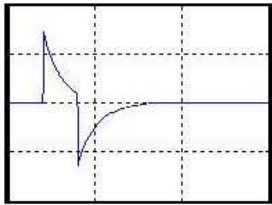
$$t \geq 2 : y(t) = e^2(1 - e^{-4})$$

$$(c) x(t) = e^{-t}(u(t+2) - u(t-2)), \quad h(t) = u(t+1) - u(t-5)$$

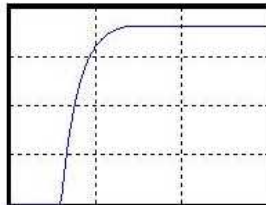
$$Ans) -3 \leq t < 1 : y(t) = e^2(1 - e^{-(t+3)})$$

$$1 \leq t < 3 : y(t) = e^2(1 - e^{-4})$$

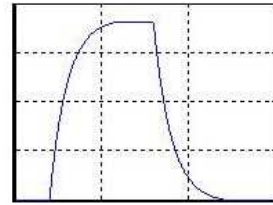
$$3 \leq t < 7 : y(t) = e^{-2}(e^{-(t-7)} - 1)$$



(a)



(b)



(c)

4.16 어떤 LTI 시스템의 임펄스 응답은  $h(t) = u(t)$ 이다. 다음 물음에 답하라.

(a) 이 시스템의 안정도를 판별하라.

Ans) BIBO 불안정

(b) 이 시스템의 입출력 관계식을 구하여 어떤 시스템인지 밝혀라.

$$Ans) y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau, \text{ 즉 이 시스템은 적분기이다.}$$

4.17  $\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 4\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$ ,  $x(t) = (e^{-t} + e^{-2t})u(t)$ 의 해에 포함되지 않는 항을 모두 골라라.

㉠  $e^{-t}$

㉡  $te^{-t}$

㉢  $t^2 e^{-t}$

㉣  $t^3 e^{-t}$

㉤  $e^{-2t}$

㉥  $te^{-2t}$

㉦  $t^2 e^{-2t}$

㉧  $t^3 e^{-2t}$

Ans) ㉡, ㉣, ㉧

$$\text{특성 방정식 : } \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 = (\lambda + 1)^2(\lambda + 2) = 0$$

4.18 미분 방정식  $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$ 으로 표현되는 연속 LTI 시스템에 대해 다음 물음에 답하라.

(a) 계단 응답을 구하라(초기 조건은  $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 0$ 이다).

$$Ans) y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + \frac{1}{2}$$

$$\therefore y(t) = -e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}, \quad t \geq 0$$

(b) 이 시스템의 임펄스 응답은  $h(t) = e^{-t} - e^{-2t}$ 이다. 컨벌루션을 이용하여 단위 계단 입력에 대한 응답을 구하여 (a)의 결과와 비교하라.

**Ans)**  $y(t) = \int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_0^t [e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}]d\tau = -e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}$

컨벌루션에 의해 얻어진 결과와 미분 방정식을 풀어서 얻어진 결과가 같다.

**4.19** 미분 방정식  $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 4x(t)$ 로 표현되는 LTI 시스템에 대해 다음의 입력과 초기 조건에 대한 시스템 응답을 구하라.

(a)  $x(t) = u(t)$ ,  $y(0) = 2$ ,  $\dot{y}(0) = 2$

**Ans)**  $y(t) = e^{-2t} + 4te^{-2t} + 1$ ,  $t \geq 0$

(b)  $x(t) = e^{-t}u(t)$ ,  $y(0) = 2$ ,  $\dot{y}(0) = 2$

**Ans)**  $y(t) = -2e^{-2t} + 2te^{-2t} + 4e^{-t}$ ,  $t \geq 0$

**4.20** 다음의 임펄스 응답을 갖는 LTI 시스템의 인과성과 안정도를 판별하라.

(a)  $h(t) = u(t)$

**Ans)** 인과성 : 인과 시스템

안정성 : 불안정한 시스템

(b)  $h(t) = \text{rect}(\frac{t}{2})$

**Ans)** 인과성 : 비인과 시스템

안정성 : 안정한 시스템

(c)  $h(t) = e^{-|t|}$

**Ans)** 인과성 : 비인과 시스템

안정성 : 안정한 시스템

(d)  $h(t) = \frac{1}{t}u(t)$

**Ans)** 인과성 : 인과 시스템

안정성 : 불안정한 시스템